keitszustandes. Erzeugnisse der Natur, wie Holz, und sonstige Pflanzenprodukte, wie Leinenstoff usw., kann man in bezug auf Molekülarbeschaffenheit nicht beeinflussen.

Kapitel II.

Bestimmung der Kräfte.

A. Analytische Kräftebestimmung.

1. Aktion und Reaktion.

In der Natur tritt keine Kraft allein auf. Sie ruft stets eine ebenso große Gegenkraft hervor. Sind beide Kräfte gleich groß, so befinden sie sich im Gleichgewicht. Dieses Naturgesetz heißt das „Gesetz der Aktion und Reaktion“.

Jeder in der Technik auftretenden Kraft muß eine ebenso große Gegenkraft entgegengestellt werden. Alle Kräfte müssen sich im Gleichgewichtszustand befinden.

Wirkt z. B. eine Kraft K (Abb. 25) in senkrechter Richtung nach unten, so muß irgendein Organ O eine ebensogroße Kraft der ersteren entgegen, also von unten nach oben, wirken lassen. Es muß also stets $O = K$ sein. Gleichfalls: Wirkt eine Kraft K (Abb. 26) von einem Punkt p senkrecht von unten nach oben, so muß p von einer Kraft O, die entgegengesetzt K, also senkrecht von oben nach unten gerichtet und gleich groß K ist, festgehalten werden. Trifft das zu, so befinden sich die Kräfte im Gleichgewicht.

Abb. 25.

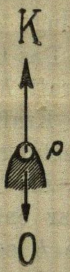


Abb. 26.

2. Der zweifach unterstützte einarmige Hebel.

Zuweilen greift die Kraft K das Organ der Gegenkraft O indirekt an. Setzt sich O z. B. aus zwei Stücken O_1 und O_2 (Abb. 27) zusammen, die durch eine Traverse L

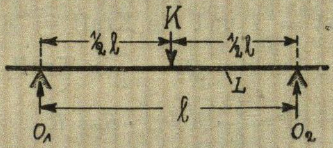


Abb. 27.

verbunden werden, so verteilt sich, wenn K genau in der Mitte von L angreift und die beiderseitigen Hebelarme der Traverse je $1/_2\,L$ betragen, K gleichmäßig auf beide Angriffspunkte der Gegenkräfte O_1 und O_2. Jede derselben muß also $1/_2\,K$ betragen.

Denkt man sich L im Punkt O_1, der uns gegeben ist, gelenkig aufgehängt, so wirkt L als Hebelarm von der Länge l auf O_2. Das Gewicht des Hebels L beträgt $= 0$.

Greift die Kraft K über O_2 an, so ist die Länge des Hebelarms l der Kraft K gleich der Länge des Hebelarms L der Belastung. Beide stehen im Verhältnis $1:1$. (Die Gegenkraft, die K im Gleichgewicht hält, muß, da sie K unmittelbar entgegengesetzt ist, wie in Abb. 25, ebenso groß wie K sein.) Die Belastung P des Punktes O_2 beträgt hiernach $= K$.

Greift die Kraft K über dem Drehpunkt des Hebelarmes L über O_1 an, so ist $l = 0$, da sich K mit O_1 deckt. Das Verhältnis des Hebelarmes l der Kraft zum Hebelarm L der Last beträgt $0:1 = 0$. (Die Kraft K wirkt nur auf O_1, die Belastung P auf den Punkt O_2 beträgt $= 0$.)

Wenn der Hebelarm l der Kraft $= 1$ und der Hebelarm L der Last $= 1$ und die Kraft $= K$, dann ist die Belastung P des Punktes $O_2 = \frac{l}{L} \times$ Kraft, folglich

25) $$P = \frac{l}{L} \cdot K = 1 \cdot K = K.$$

Wenn der Hebelarm l der Kraft $= 0$ und der Hebelarm L der Last $= 1$ und die Kraft $= K$, dann ist die Belastung P des Punktes $O_2 = \frac{l}{L} \times$ Kraft, folglich

26) $$P = \frac{l}{L} \cdot K = 0 \cdot K = 0.$$

Greift nun K in der Mitte der Traverse (Abb. 27) L an, so steht der Hebelarm l der Kraft zum Hebelarm L

der Last im Verhältnis $^1/_2 : 1$ oder $1:2$. Die Belastung P des Punktes O_2 beträgt dann

27) $$P = \frac{l}{L} \cdot K = \frac{1}{2} \cdot K = {}^1/_2 K$$

wie vorher.

Will man nun die durch die Kraft K dem Punkt O_1 mitgeteilten Drucke feststellen, so dreht man die Anschauung herum, man betrachtet den Punkt O_2 als Drehpunkt des Hebelarmes L und rechnet die Längen l dann natürlich von hier aus.

Allgemein: Kräfte auf einem Hebelarm verhalten sich umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Drehpunkt zueinander.

Bezeichnet man mit

L die Länge des Hebelarmes der Last P,

l die Länge des Hebelarmes der Kraft K,

dann ist $P : K = l : L$. Hieraus folgt:

28) $$P = \frac{K \cdot l}{L},$$

29) $$K = \frac{P \cdot L}{l},$$

30) $$l = \frac{P \cdot L}{K},$$

31) $$L = \frac{K \cdot l}{P}.$$

In allen Berechnungen werden Maße in Zentimeter und Belastungen in Kilogramm eingesetzt.

Rechnungsbeispiel: Ein Balken A liegt rechts und links auf den Stützen a und b (Abb. 28) auf. Die Stützen sind im Abstand von 75 cm aufgestellt. Eine Kraft in Form eines Gewichtes von 50 kg greift 25 cm von a entfernt an. Welche Belastung erleidet a und b?

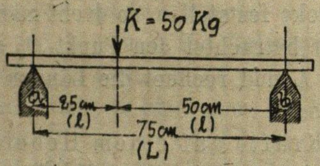


Abb. 28.

Bezeichnet
P_a = den der Stütze a mitgeteilten Druck,
P_b = den der Stütze b mitgeteilten Druck,
K = die belastende Kraft,
l = die Entfernung der Kraft K vom Drehpunkt des Hebels,
L = die Länge des Hebels,
dann ist:

$$P_a = \frac{K \cdot l}{L} = \frac{50 \cdot 50}{75} = 33{,}3 \text{ kg};$$

$$P_b = \frac{K \cdot l}{L} = \frac{50 \cdot 25}{75} = 16{.}6 \text{ kg}.$$

Tritt die Kraft K als negative Beanspruchung auf, so müssen die Gegenkräfte ebenfalls negativ sein. Ihre Größe berechnet sich genau wie die der positiven Beanspruchung.

Nicht immer greift die Kraft nur an einem Punkt an, sie verteilt sich zuweilen auf die ganze Länge des Hebelarmes.

Der Hebel L (Abb. 29) ist auf seiner ganzen Länge mit einer gleichmäßig dicken Schicht Sand Q belastet; welche Drucke erfahren die Stützen a und b?

Zunächst ist klar, daß, wenn L wagerecht und die Last sich gleichmäßig verteilt, jede Stütze die Hälfte des Druckes bekommt. Soll die Druckbestimmung ver-

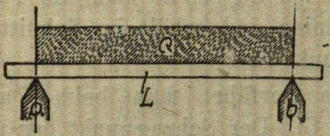


Abb. 29.

allgemeinert werden, so müssen wir sie in eine Formel bringen.

Man suche den Schwerpunkt der Last. In diesem konzentriert sich die durch sein Gewicht verursachte Kraft. Senkrecht unter dem Schwerpunkt auf dem Hebel liegt der Angriffspunkt der Kraft.

Man hat so die zur Berechnung der Einzeldrucke nach obigen Formeln 28 bis 31 nötigen Faktoren gefunden und kann die Rechnung danach ausführen.

Es handelt sich noch darum, die Schwerpunkte verschiedener Querschnittsflächen zu bestimmen.

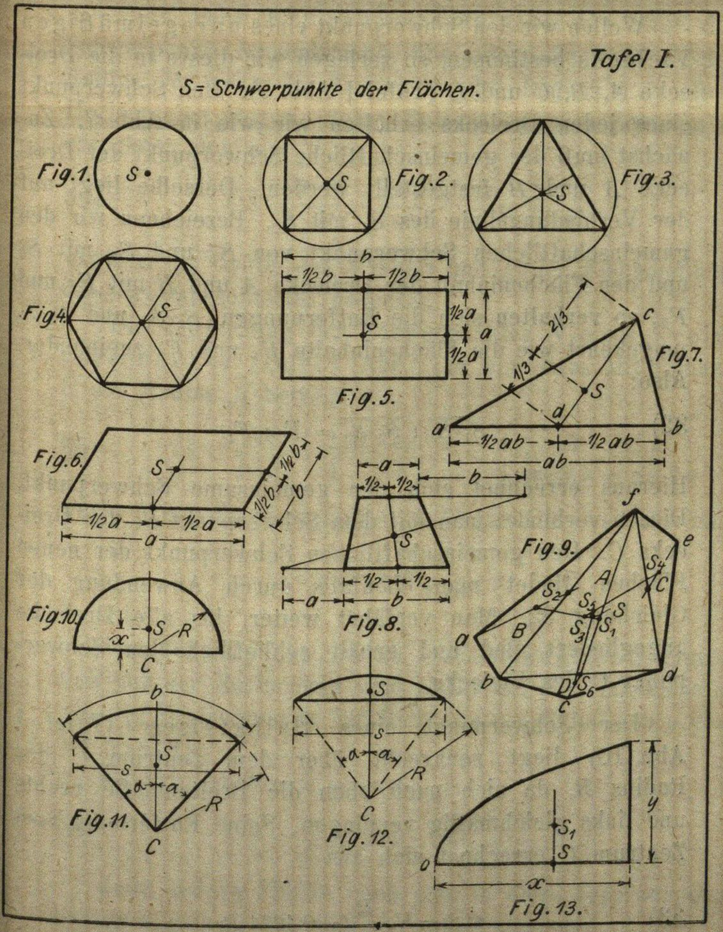
3. Schwerpunkte der ebenen Flächen.

Die Schwerpunkte S der regelmäßigen Flächen, wie Kreis, Quadrat, gleichseitiges Dreieck, regelmäßiges Vieleck (Tafel I Abb. 1—4), fällt stets mit dem Zentrum des durch mehrere analoge Punkte geschlagenen Kreises zusammen.

Den Schwerpunkt eines Rechtecks (Tafel I Abb. 5) findet man, indem man zunächst die Maße der Länge a und dann die Maße der Höhe b halbiert. Von den erhaltenen Punkten aus zieht man die Parallelen zu den Begrenzungslinien und erhält im Schnittpunkt derselben den Schwerpunkt S.

Genau so verfährt man beim Parallelogramm (Tafel I Abb. 6). Der Schwerpunkt des ungleichmäßigen Dreiecks (Tafel I Abb. 7) ergibt sich, wenn man die Grundlinie $a\ b$ halbiert, von dem erhaltenen Punkt d eine Gerade nach dem gegenüberliegenden Scheitel c zieht und die Linie $d\ c$ in drei Teile teilt. Die Entfernung des Schwerpunktes S vom Punkt d der Grundlinie ist gleich $\frac{1}{3}\ \overline{dc}$.

Den Schwerpunkt eines Trapezes erhält man, indem man die Mittelpunkte der Parallelen durch eine Linie verbindet, der oberen Geraden a (Tafel I Abb. 8) die Länge der unteren b und der unteren Geraden nach entgegengesetzter Seite die Länge der oberen a anfügt; verbindet man die neu erhaltenen Endpunkte durch eine Linie, so ist der Schnittpunkt beider Hilfslinien der Schwerpunkt S des Trapezes.


Tafel I.
S = Schwerpunkte der Flächen.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

Wollen wir den Schwerpunkt eines unregelmäßigen Vielecks bestimmen, so zerlegen wir dieses in die Dreiecke A, B, C und D (Tafel I Abb. 9). Den Schwerpunkt eines jeden Dreiecks erhalten wir wie in Abb. 7. Zunächst muß der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Dreiecke A und B festgestellt werden. Derselbe liegt auf der Verbindungslinie des S_1 mit S_2. Bezeichnen wir den gemeinschaftlichen Schwerpunkt von S_1 und S_2 mit S_3 und den Flächeninhalt der Dreiecke A und B mit F_1 und F_2, so verhalten sich die Entfernungen $\overline{S_1 S_3}$ und $\overline{S_2 S_3}$ umgekehrt wie die Flächeninhalte F_1 und F_2 zueinander. Also:

32) $$\overline{S_1 S_3} : \overline{S_2 S_3} = F_2 : F_1.$$

Hieraus errechnet sich der gemeinsame Schwerpunkt. Diesen verbindet man mit dem Schwerpunkt S_4 des Dreiecks C. Den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der neuen Flächen findet man ebenfalls durch Anwendung der Gleichung 32. Man verfährt weiter, bis alle Dreiecke angegliedert sind und erhält schließlich den Schwerpunkt C des Vielecks.

Der Schwerpunkt eines Halbkreises (Tafel I Abb. 10) liegt senkrecht über dem Zentrum C des Radius R, da sich nach oben die Breitenmaße rechts und links gleichmäßig verjüngen. Seine Entfernung vom Zentrum C errechnet sich aus

33) $$\overline{CS} = {}^4\!/_3 \frac{R}{\pi} = 0{,}4244\, R.$$

Auch beim Kreisausschnitt (Abb. 11) liegt der Schwerpunkt S senkrecht über dem Zentrum C des Radius R, wenn die Endpunkte des Bogens b in einer Horizontalen liegen. Seine Entfernung vom Zentrum C errechnet sich aus

34) $$\overline{CS} = \frac{2 \cdot R}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{R^2 \cdot S}{3\,F},$$

worin α die Größe des Winkels und F den Flächeninhalt des Kreisausschnittes bedeutet.

Die Entfernung des Schwerpunktes S eines Kreisausschnittes (Tafel I Abb. 12) von dem Mittelpunkt C des Radius R beträgt

35) $$\overline{OS} = \frac{S^3}{12\,F} = \frac{2}{3}\,\frac{R \cdot \sin^3 \alpha}{F} = \frac{4}{3}\,\frac{R \cdot \sin^3 \alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha},$$

worin F den Flächeninhalt $= {}^1/_2\, R^2\,(\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha)$ und

$$\operatorname{arc} 2\alpha = 2\,\frac{\alpha^0}{180^0} \cdot \pi$$

bedeutet.

Der Schwerpunkt S eines Parabelsegments ergibt sich aus der Entfernung vom Nullpunkt der Halbachse x und der Entfernung in der Richtung der Halbachse y von der x-Achse.

Es berechnet sich

36) $$\overline{OS} = \frac{3}{5}\,x \quad \text{und} \quad \overline{SS_1} = \frac{3}{8}\,y.$$

Jede andere Fläche kann man in diese besprochenen zerlegen und so den Schwerpunkt bestimmen.

4. Anwendung des in 3 Gesagten auf den zweifach unterstützten Hebel.

Der Balken L ist auf dargestellte Art mit 200 kg belastet. Die Querschnittsform der Belastung entspricht einem unregelmäßigen Vieleck. Der Schwerpunkt wird, wie in Ziffer 3 gesagt, bestimmt. Es ergibt sich, daß er 100 cm von a und 75 cm von b über dem Balken liegt. Senkrecht unter ihm liegt der Punkt, von dem aus a und b belastet werden.

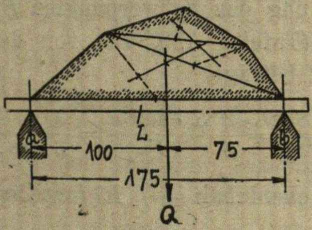


Abb. 30.

Wollen wir die Belastung von a berechnen, so erhalten wir in b den Drehpunkt des Hebelarms. Von ihm aus sind die Entfernungen von Kraft und Belastung zu messen. Lt. Formel 28 ist

$$P_a = \frac{K \cdot l}{L} = \frac{200 \cdot 75}{175} = 85{,}7 \text{ kg},$$

denn K ist die angreifende Kraft, die die Last Q abgibt und 200 kg beträgt; l ist ihre Entfernung vom Drehpunkt, die 75 cm beträgt und L ist die Entfernung des

Punktes a, der den Druck P erfährt. Der Stützpunkt a erfährt einen Druck von 85,7 kg.

Soll die Belastung der Stütze b berechnet werden, so sieht man a als den Drehpunkt des Hebelarms an und erhält:

$$P_b = \frac{K \cdot l}{L} = \frac{200 \cdot 100}{175} = 11{,}4 \text{ kg.}$$

Der Stützpunkt b erfährt einen Druck von 11,4 kg.

5. Belastung des einarmigen Hebels durch mehrere Kräfte.

Wird der zweifach unterstützte Hebelarm L gleichzeitig von mehreren Kräften belastet, so wirkt jede der-

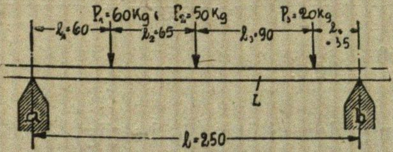


Abb. 31.

selben für sich auf die Stützen a und b ein. Die Momente, d. h. die Produkte aus Kraft und Hebelarm, müssen folglich einzeln ausgerechnet und addiert werden.

Soll die Druckbelastung der Stütze a berechnet werden, so erhalten wir folgende Formel:

$$P_a = \frac{K_1 \cdot (l_4 + l_3 + l_2)}{L} + \frac{K_2 \cdot (l_4 + l_3)}{L} + \frac{K_3 \cdot l_4}{L}$$

37) $$= P_a = \frac{60 \cdot (35 + 90 + 65)}{250} + \frac{50 \cdot (35 + 90)}{250} + \frac{20 \cdot 35}{250}$$

$$= \frac{60 \cdot 190}{250} + \frac{50 \cdot 125}{250} + \frac{20 \cdot 35}{250} = \frac{11\,400 + 6250 + 300}{250}$$

$$= \frac{18\,350}{250} = 73{,}4.$$

Die Stütze *a* erhält eine Belastung von 73,4 kg. Für die Berechnung der Belastung der Stütze *b* gilt folgende Formel:

$$P_b = \frac{K_1 \cdot l_1}{L} + \frac{K_2 \cdot (l_1 + l_2)}{L} + \frac{K_3 \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{L}$$

38) $$= P_b = \frac{60 \cdot 60}{250} + \frac{50 \cdot (60 + 65)}{250} + \frac{20 \cdot (60 + 65 + 90)}{250}$$

$$= \frac{60 \cdot 60}{250} + \frac{50 \cdot 125}{250} + \frac{20 \cdot 215}{250} = \frac{3600 + 6250 + 4300}{250}$$

$$= \frac{14\,150}{250} = 56{,}6.$$

Die Belastung der Stütze *b* beträgt 56,6 kg. Wenn $a = 73{,}4$ und *b* 56,6 kg zu tragen hat, so muß die Gesamtbelastung $73{,}4 + 56{,}6 = 130$ kg betragen, was sich in der Tat ergibt aus

$$K_1 + K_2 + K_3 = 60 \text{ kg} + 50 \text{ kg} + 20 \text{ kg} = 130 \text{ kg}.$$

Genau so verhalten sich negative Kräfte jedoch nur mit dem Unterschied, daß alle Beanspruchungen entgegengesetzt gerichtet sind.

6. Der zweiarmige Hebel.

Verlängert man den im vorigen Abschnitt besprochenen Hebel über seinen Drehpunkt o hinaus, so entsteht ein zweiter Hebelarm (Abb. 32).

Ist $l_1 = l_2$ und $P_1 = P_2$, so befindet sich der zweiarmige Hebel im Gleichgewicht. Bzw., soll sich der zweiarmige Hebel im Gleichgewicht befinden, so müssen die beiderseitigen Momente gleich groß sein. Die Belastung der Stütze a ist gleich der Summe der auf die Hebelarme

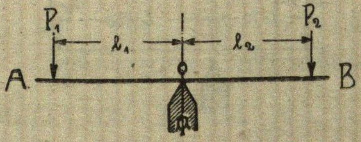


Abb. 32.

wirkenden Kräfte. Bezeichnet man das durch die Kraft P auf den Hebelarm l erzeugte Moment mit $M\,p$, so errechnet es sich aus:

39) $$M\,p = P \cdot l.$$

Ein zweiarmiger Hebel, dessen rechter Arm $l_2 = 120$ cm lang ist, wird auf dem linken Arm, der eine Länge von $l_1 = 70$ cm hat, mit $P_1 = 130$ kg beladen. Wie groß muß die Kraft P_2 sein, wenn der Hebelarm im Gleichgewichtszustand sein soll? Es muß $M\,p_1 = M\,p_2$ sein.

$$M\,p_1 = l_1 \cdot P_1 = 70 \cdot 130 = 9100 \text{ kgcm}.$$

$$M\,p_2 = l_2 \cdot P_2 = 120 \cdot P_2 = 9100 \text{ kgcm}.$$

Wenn $120 \cdot P_2 = 9100$, dann ist $P_2 = \frac{9100}{120} = 75{,}83$ kg. Ist also der linke Arm von 70 cm Länge mit 130 kg, der rechte von 120 cm Länge mit 75,83 kg belastet, so befindet sich der Hebel bzw. die Kräfte im Gleichgewicht. Die Belastung der Stütze a ist gleich der Summe der Kräfte, folglich $Pa = P_1 + P_2 = 130 + 75{,}83 = 205{,}83$ kg. Kommen verteilte Lasten in Frage, so muß als Hebelarm die Entfernung des Schwerpunktes der Last vom Dreh-

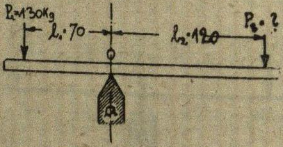


Abb. 33.

punkt in Zentimetern und als Kraft das Gewicht der Last in Kilogramm eingesetzt werden, genau wie in Abschnitt 4 gesagt.

7. Belastung des zweiarmigen Hebels durch mehrere Kräfte.

Soll sich ein zweiarmiger Hebel, der durch mehrere Kräfte an verschiedenen Stellen belastet wird, im Gleichgewicht befinden, so muß die Summe der Momente des rechten Hebelarms gleich der Summe der Momente des linken Hebelarms sein. Also

40) $$Mp_1 = Mp_2 + Mp_3 + Mp_4. \quad \text{(Abb. 34.)}$$

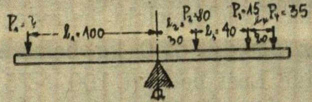


Abb. 34.

Wie groß muß P_1 sein? Welche Belastung bekommt a?

$$Mp_1 = Mp_2 \sqrt{p_3} \sqrt{p_4}.$$

$$Mp_1 = 30 \cdot 80 + (30 + 40) \cdot 15 + (30 + 40 + 20) \cdot 35$$
$$= 2400 + 1050 + 3150 = 6600 \text{ kgcm}.$$

Wenn $Mp_1 = 100 \,.\, P$ und $Mp_1 = 6600$, dann ist $P_1 = \frac{6600}{100} = 66$ kg.

Die Stütze a erfährt einen Druck, der gleich der Summe aller Kräfte ist, folglich

$$Pa = 66 + 80 + 15 + 35 = 196 \text{ kg}.$$

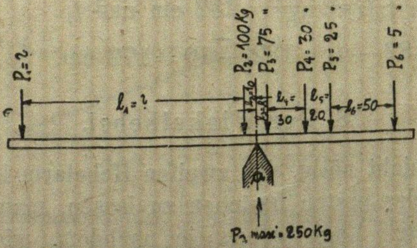


Abb. 35.

Abb. 35 stellt einen durch mehrere Kräfte belasteten Hebel dar. Derselbe soll so belastet werden, daß sich seine Momente im Gleichgewicht befinden. Die Stütze a darf nicht höher als mit 250 kg belastet werden. Die absolut notwendige Last beträgt $100 + 75 + 30 + 25 + 5 = 235$ kg. Für P_1 bliebe eine Belastung von $250 - 235 = 15$ kg. Die Summe der Momente des rechten Hebelarms ist

$$Mp = 8 \cdot 75 + (8 \pm 30) \cdot 30 + (8 + 30 \pm 20) \cdot 25 + (8 + 30 + 20 + 50) \cdot 5 = 8 \cdot 75 + 38 . 30 + 58 \cdot 25 + 108 . 5 = 600 + 1140 + 1450 + 540 = 3730 \text{ kgcm}.$$

Hiervon subtrahiert sich das Moment Mp_2 des linken Hebelarmes, welches beträgt

$$Mp_2 = l_2 \cdot P_2 = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ kgcm}$$

$$Mp - Mp_2 = Mp_1;\ 3730 - 1000 = 2730 \text{ kgcm}.$$

Wenn $Mp_1 = 2730 \text{ kgcm} = 15 \cdot l_1 + l_2$, dann ist

$$l_1 + l_2 = \frac{2730}{15} = 182 \text{ cm und } l_1$$

$$182 - l_2 = 182 - 10 = 172 \text{ cm}.$$

8. Der Winkelhebel.

Es ist nicht nötig, den zweiten Hebelarm in der Verlängerung des ersten bestehen zu lassen, man kann ihm jede beliebige Lage geben, je nachdem, wie man die Gegenkraft wirken lassen will.

Abb. 36. Steht der zweite Arm $\overline{OB}$ rechtwinklig zu $\overline{OA}$ so muß die Richtung der Kraft P_2 ebenfalls rechtwinklig zur Richtung der Kraft P_1 sein. Als Länge der Hebelarme gilt natürlich ebenfalls die Entfernung der Belastungspunkte vom Drehpunkte 0.

Ist $l_1 = 50$ cm und $P_1 = 20$ kg, so ist $Mp_1 = 20 \cdot 50 = 1000$ kgcm.

Ist $l_2 = 20$ cm, dann muß P_2, weil

$$Mp_1 = Mp_2 \quad \text{und}$$
$$Mp_2 = 1000 \text{ kgcm},$$
$$P_2 = \frac{1000}{20} = 50 \text{ kg sein.}$$

Im übrigen gilt das Bekannte.

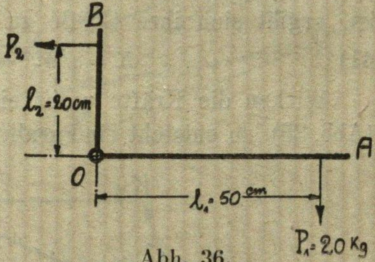


Abb. 36.

9. Zusammengesetzte Kräfte.

Wirken auf einen Punkt die Kräfte in verschiedener Richtung, so wird er eine Richtung einschlagen, die sich

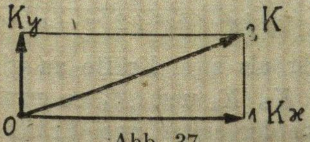


Abb. 37.

aus allen Kräften zusammensetzt. Auf den Punkt 0 (Abb. 37) wirkt zuerst die Kraft Kx und leitet die Bewegung $\overline{01}$ ein. Hierauf wirkt auf den Punkt 0, der jetzt bei 1 ist, die Kraft Ky und leitet die Bewegung $\overline{12}$ ein. Da aber die Kräfte nicht einzeln hintereinander, sondern zu gleicher Zeit wirken, ergibt sich eine Bewegung in der Richtung 0—2. Die so erhaltene Kraft K setzt sich aus den Kräften Ky und Kx zusammen. Man nennt sie die Resultierende der Komponenten Ky und Kx. Da sie die Diagonale eines Rechtecks der Seiten Ky und Kx ist, ergibt sich ihre Größe zu

41) $$K = \sqrt{ky^2 + kx^2}.$$

Wirken die Kräfte unter einem beliebigen Winkel α (Abb. 38), so entsteht ein Parallelogramm, d. i. das Kräfte-

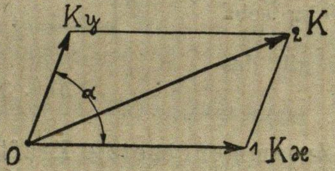


Abb. 38.

parallelogramm, und die Resultierende berechnet sich aus

42) $$K = \sqrt{ky^2 + kx^2 + 2\,ky \cdot kx \cdot \cos\alpha}.$$

Wirken mehr als zwei Kräfte zu gleicher Zeit, wie in Abb. 39 K_1, K_2, K_3 und K_4, so ermittelt man zuerst die Resultierende der ersten zwei Kräfte K_1 und K_2, die unter dem Winkel α_1 wirken. Sie ergibt sich in Ka rechnerisch nach Formel 42). Hierauf errechnet man die Resultierende der Kräfte K_3 und Ka, die unter dem Winkel α_2 wirken. Sie ergibt sich in Kb. Es bleibt noch übrig die Resultierende der Kräfte K_4 und Kb, die unter dem Winkel α_3 wirken, zu bestimmen. Als Resultierende aller Kräfte ergibt sich K.

Es lassen sich so alle Kräfte rechnerisch bestimmen.

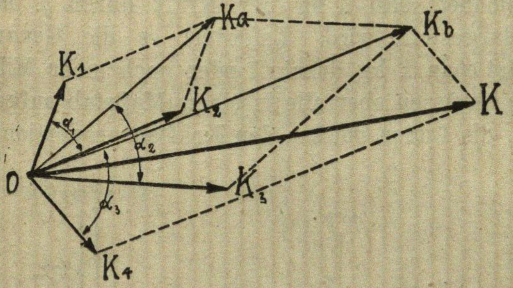


Abb. 39.

B. Graphische Kräftebestimmung.

Ein wesentlich einfacheres und bequemeres Verfahren gegenüber der analytischen ist die grafische Bestimmung der Kräfte. Während man in der Analytik oft die umständlichsten Formeln anwenden muß, erhält man die Größe der gesuchten Kräfte zeichnerisch als Linien, deren Längen im Verhältnis zu den Kräften stehen. Die letztere Art ist auf alle Fälle weit übersichtlicher, hauptsächlich, wo viele Momente zugleich ermittelt werden sollen. Es sollen im Nachstehenden die für den Flugzeugbau wichtigsten Grafigons dargestellt und erklärt werden.

1. Darstellung der Kräfte.

Jede Kraft kann durch eine Linie dargestellt werden. Die Linie deutet die Richtung der Kraft von einem Punkte aus an. Alle Kräfte werden in einem Maßstab derart aufgezeichnet, daß 1 kg der Kraft durch 1 mm der Linie dargestellt wird. Erfordert es die Genauigkeit, so deutet man 1 kg durch 2 oder noch mehr Millimeter an. Stets müssen aber alle in einem Maßstab aufgetragen werden, die Linien müssen den Kräften proportional sein.

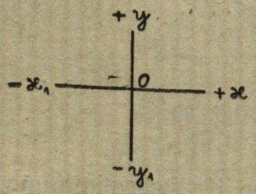


Abb. 40.

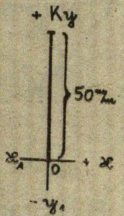


Abb. 41.

In einem Koordinatensystem (Abb. 40) werden
positive Horizontalkräfte auf der Abszisse X, vom 0 Punkt gemessen,
positive Vertikalkräfte auf der Ordinate Y, vom 0 Punkt gemessen,
negative Horizontalkräfte auf der Abszisse X_1, vom 0 Punkt gemessen,
negative Vertikalkräfte auf der Ordinate Y_1, vom 0 Punkt gemessen,
maßstäblich aufgetragen.

Wirkt eine positive Vertikalkraft $Ky = 50$ kg, so trägt man sie folgendermaßen auf: (Abb. 41)

Eine positive Horizontalkraft $Kx = 35$ kg wird nach Abb. 42 aufgetragen.

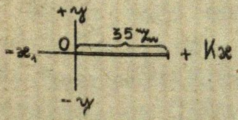


Abb. 42.

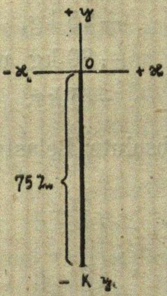


Abb. 43.

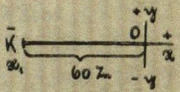


Abb. 44.

Eine negative Vertikalkraft $-Ky = 75$ kg ist in Abb. 43 aufgetragen.

Wie eine negative Horizontalkraft $-Kx = 60$ kg aufgetragen wird, veranschaulicht Abb. 44.

2. Kräftesumme, Kräftedifferenz.

Wirken mehrere positive und negative Kräfte in einer Vertikalen zugleich, so wird ihre absolute Größe durch die sich zuletzt ergebende Summe bzw. Differenz dardargestellt.

Für die Belastung eines Körpers werden folgende Vertikalkräfte ermittelt:

1) $+23$ kg,
2) $+17$ kg,
3) -50 kg,
4) $+80$ kg,
5) $+75$ kg,
6) -30 kg und
7) -5 kg.

Wie groß ist die absolute Belastung des Körpers?

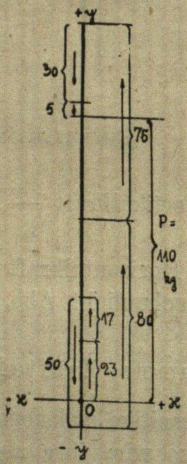


Abb. 45.

Alle Kräfte werden nacheinander aufgetragen (Abb. 45). Die erste Kraft $= +23$ kg wird als positiv vom 0 Punkt nach oben maßstäblich aufgetragen. Der Endpunkt der Linie gilt nun als Nullpunkt der folgenden Kraft. Die zweite Kraft $= +17$ kg wird in der Verlängerung der Linie nach oben aufgetragen. Die dritte Kraft $= -50$ kg wird als negative Vertikalkraft vom Nullpunkt aus nach unten maßstäblich aufgetragen. Als Nullpunkt gilt wieder der Endpunkt der vorhergehenden Kraftlinie. Von dem nun erhaltenen Endpunkt wird die vierte Kraft $= +80$ kg nach oben aufgetragen, hierauf die fünfte $= +75$ kg nach oben, dann die sechste $= -30$ kg nach unten und schließlich die letzte $= -5$ kg nach unten. Der Endpunkt der letzten Linie ergibt durch seine Entfernung vom 0 Punkt des Koordinatensystems die Größe der absoluten Kraft. Liegt er oberhalb des Nullpunktes, wie in Abb. 45, so ist die gesuchte Kraft positiv, liegt er unterhalb des Nullpunktes, so ist sie negativ.

Genau so verfährt man bei der Ermittelung einer Horizontalkraft aus mehreren verschiedenartigen. Die positiven werden von links nach rechts, die negativen von rechts nach links aufgetragen.

3. Resultierende verschieden wirkender Kräfte.

Treten zwei oder mehr Kräfte in verschiedenen Richtungen auf, so kann man aus der Resultierenden ihrer Komponenten die absolute Wirkung erkennen, was bei der Entwickelung der Formeln 41 und 42 durch Abb. 37 und 38 erläutert wurde. Man hat nicht nötig, die Resultierende zu berechnen, sondern trägt die Kräfte in ihren Richtungen maßstäblich als Komponenten auf und erhält so die Resultierende zeichnerisch in der Länge einer Linie.

1. Eine Kraft $Ky = 75$ kg wirkt in vertikaler Richtung,
   eine Kraft $Kx = 50$ kg wirkt in horizontaler Richtung.

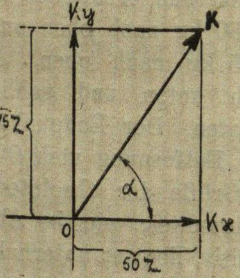


Abb. 46.

Wie groß ist die absolute Beanspruchung und wie deren Richtung.

Abb. 46. Die vertikale Kraft $Ky = 75$ kg trägt man von einem Nullpunkt aus so auf, daß 1 mm = 1 kg darstellt. Hierauf zeichnet man die horizontale Kraft $Kx = 50$ kg vom gleichen Nullpunkt im gleichen Maßstab auf. Dann zieht man die Parallele zu $\overline{OKy}$ und $\overline{OKx}$. Den Schnittpunkt K verbindet man durch eine Linie mit dem Nullpunkt und erhält in $\overline{OK}$ die Resultierende der Kräfte Ky und Kx. Legt man den Maßstab an, so stellt man die Länge von OK als 90 mm fest. Da aber 1 mm = 1 kg darstellt, so ist die Größe der Kräfte Ky und Kx in der Resultierenden = 90 kg. Die Richtung der Resultierenden (α) wird mittels Winkelmessers gemessen.

2. Schließen die Kräfte $Ky = 66$ kg und $Kx = 36$ kg einen Winkel von 60° ein, so findet man die Resultierende K, indem man die Horizontale $Kx = 30$ kg aufträgt

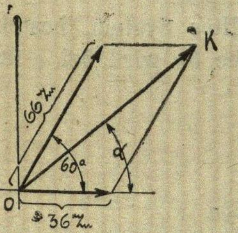


Abb. 47.

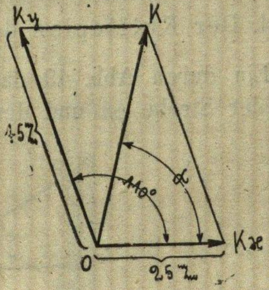


Abb. 48.

trägt (Abb. 47), sodann den Winkelmesser anlegt und unter 60° $Ky = 55$ kg aufträgt. Nun zieht man zu Ky und Kx die Parallelen, verbindet den Schnittpunkt K mit dem Nullpunkt und erhält in OK die resultierende Kraft = 90 kg, in α ihre Richtung.

3. Die horizontale Kraft $Kx = 25$ kg schließt mit $Ky = 45$ kg 110° ein. Wie groß ist die resultierende Kraft?

Abb. 48. Die Kraft Kx wird horizontal aufgetragen. Mit ihr einen Winkel von 110° einschließend die Kraft Ky.

Man zieht die Parallelen zu Ky und Kx, verbindet den Schnittpunkt K mit O und erhält in der Länge der Linie OK die Resultierende von Ky und Kx und in α ihre Richtung.

Treten mehr als zwei Kräfte auf, so verfährt man, wie auf Seite 75 bei Erklärung der Berechnung der Resultierenden mehrerer Kräfte durch Abb. 39, indem man die Linien genau maßstäblich zeichnet und abmißt.

4. Der Kräfteplan der statischen Systeme.

Ein durch Abb. 49 dargestelltes System, bestehend aus der Strebe ca und der Strebe bc wird bei c durch

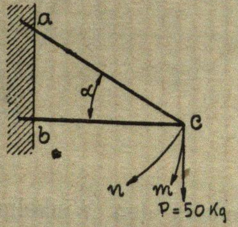


Abb. 49.

$P = 50$ kg belastet. ca ist bei a und bc bei b fest eingespannt. Bei c sind beide Streben miteinander verbunden. Im Punkt c greift eine negative, also Zugkraft in vertikaler Richtung an. P muß bestrebt sein, c nach unten zu bewegen. Da c, der Endpunkt der Strebe $\overline{ca}$, die bei a fest eingespannt ist, eine absolut vertikale Bewegung nicht ausführen kann, wäre eine Bewegung dem Bestreben der Kraft P entsprechend nur durch eine Pendelbewegung der Strebe ac um den Punkt a in der Richtung n möglich. Bei dieser Bewegung entsteht eine Belastung der Strebe $b\,c$. Diese wird also eine positive Belastung bekommen. Die Strebe $b\,c$ läßt die Bewegung n auch nicht zu, gibt ihrerseits nur die Möglichkeit, dem Bestreben der Kraft P entsprechend eine Pendelbewegung in der Richtung m auszuführen. Hierbei wird $a\,c$ durch eine negative Kraft beansprucht.

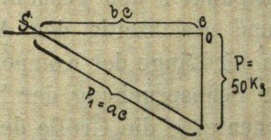


Abb. 50.

Es handelt sich darum, die Größe der auftretenden Kräfte zu bestimmen.

Die Richtungen der drei vorkommenden Kräfte und die Größe einer Kraft ist uns bekannt, also können wir auch die Größen der zwei anderen Kräfte bestimmen. Folgendermaßen:

Einen Punkt, in dem mehrere Kräfte zusammenwirken, nennt man Knotenpunkt. Der erste in einem System vorkommende Knotenpunkt liegt stets im Nullpunkt des Koordinatensystems. Als erster und einziger Knotenpunkt kommt in diesem Fall c in Frage (Abb. 50).

Man trägt vom Nullpunkt aus zuerst die bekannte Kraft $P = 50$ kg als negative nach unten auf. Im Endpunkt legt man die zweite negative Kraft (nach links) in der bekannten Richtung an. Ihre Größe, also die Länge der Linie ist uns noch unbekannt. Von ihrem Endpunkt aus müssen wir die positive Kraft der Strebe bc auftragen. Deren Richtung ist uns bekannt. Da ein derartig entwickeltes Kräftedreieck aber stets, wie das System selbst, geschlossen sein muß, wissen wir, daß die Komponente der Kraft bc den Punkt c schneiden muß. Wir zeichnen durch c die Komponente bc ein und erhalten im Schnittpunkt s den gesuchten Endpunkt der Komponente ac und gleichzeitig den Anfangspunkt der Komponente bc. In der Länge der Komponente ac erhalten wir die Größe der Beanspruchung der Strebe ac, in der Länge der Komponente bc die Größe der Beanspruchung der Strebe bc.

Die kompliziertesten Systeme setzen sich aus derartigen Dreiecken zusammen.

5. Bestimmung von Momenten.

Genau wie Kräfte lassen sich auch Momente grafisch ermitteln.

Will man das Moment M einer Kraft P durch den Hebelarm l, an einem Punkt angreifend, ermitteln, so multipliziert man P mit l und erhält $M = Pl$. Ist $l = 1$, so ist $M = P \cdot 1 = P$. Ist $l = 2$, so ist $M = P \cdot 2 = 2P$. Ist $l = x$, so ist $M = P \cdot x$. Ein auf einen Punkt wirkendes Moment M ist proportional der angreifenden Kraft. Das läßt sich grafisch folgendermaßen darstellen:

Vom Nullpunkt aus trägt man die Länge 1 des Hebelarms auf und zieht die Vertikale ab (Abb. 51).

Auf der Senkrechten b trägt man die Kraft P auf, die 25 kg betragen soll. In ac erhält man das Moment M, welches 25 cmkg beträgt. Will man nun M auf einen beliebigen Hebelarm x bezogen ermitteln, so zieht man vom Nullpunkt 0 aus durch c eine Gerade. In der Abszisse trägt man x auf und errichtet im Punkt d die Senkrechte. Die Entfernung der Punkte d und e

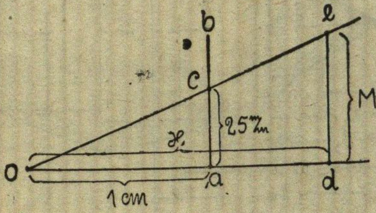


Abb. 51.

stellt die Größe des gesuchten Momentes Mx in cmkg dar. Es ist klar, daß, je größer der Hebelarm, um so größer auch Mx wird.

Diese Regel wendet man besonders vorteilhaft bei der Bestimmung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes mehrerer Körper an.

6. Schwerpunktsbestimmung.

Ist der Querschnitt einer Belastungsmasse vom Aussehen der Abb. 52, so stellt man den gemeinschaftlichen

Schwerpunkt der unterteilten Querschnittsflächen analytisch, wie in Abschnitt 3 dieses Kapitels (unter A) gesagt, fest. Die Anwendung der Graphik ist gegenüber de Analytik wesentlich vorteilhafter.

Nimmt man a als Drehpunkt des belasteten Hebels L an, so entwickeln die Kräfte P_1, $P_2 \dots Px$ durch ihren

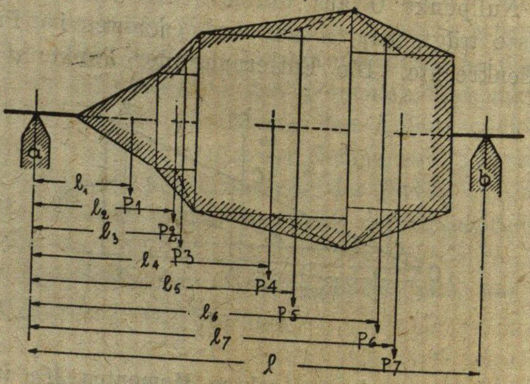
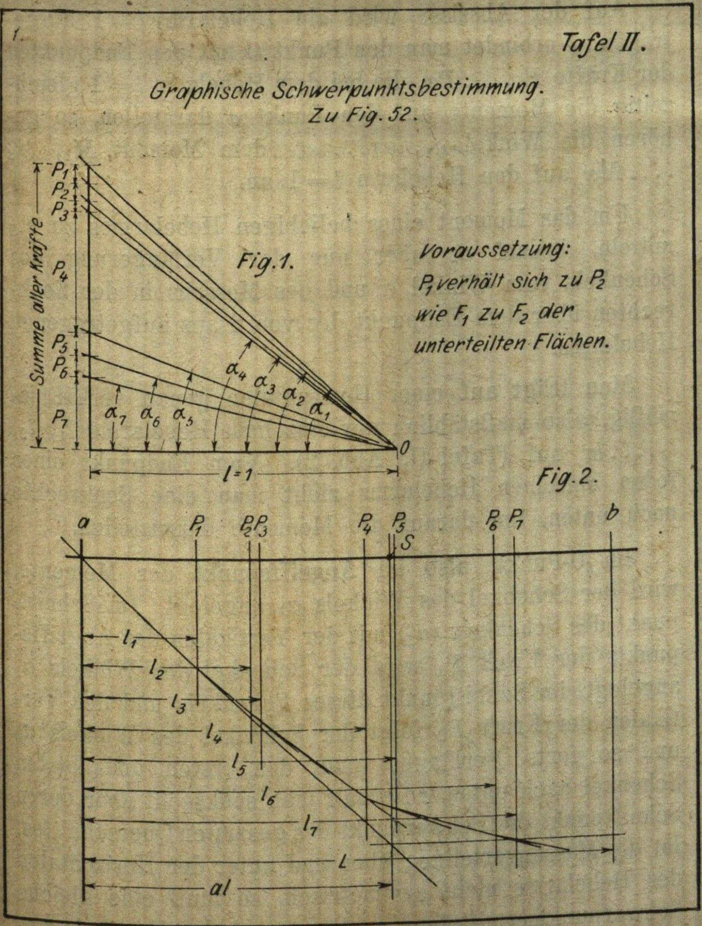


Abb. 52.

jeweiligen Hebelarm l_1, $l_2 \dots lx$ je ein Moment auf a. Zu jedem Moment addiert sich das folgende, so daß durch die Größe des letzten Momentes $M x$ eine Summe aller Momente ausgedrückt wird.

Man bestimmt zuerst die Momente der Kräfte auf den Hebelarm 1. Folgendermaßen:

In dem Koordinatensystem (Tafel II, Abb. 1) trägt man die Kräfte einzeln untereinander auf die Ordinate auf.


Tafel II.
Graphische Schwerpunktsbestimmung.
Zu Fig. 52.
Summe aller Kräfte
P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
Fig. 1.
α1
α2
α3
α4
α5
α6
α7
0
l = 1
Voraussetzung:
P1 verhält sich zu P2
wie F1 zu F2 der
unterteilten Flächen.
Fig. 2.
a
b
S
l1
l2
l3
l4
l5
l6
l7
L
al

Auf der Abszisse wird ein Hebelarm $l = 1$ aufgetragen. Verbindet man den Punkt 0 mit den Endpunkten der Kräfte $P_1 \ldots . Px$, die bei dem Hebelarm $l = 1$ gleichzeitig die Momente auf den Punkt a darstellen, so gehören die Winkel a_1, $a_2 \ldots . a_x$ dem Moment M_1, $M_2 \ldots . Mx$ auf den Hebelarm $l = 1$ an.

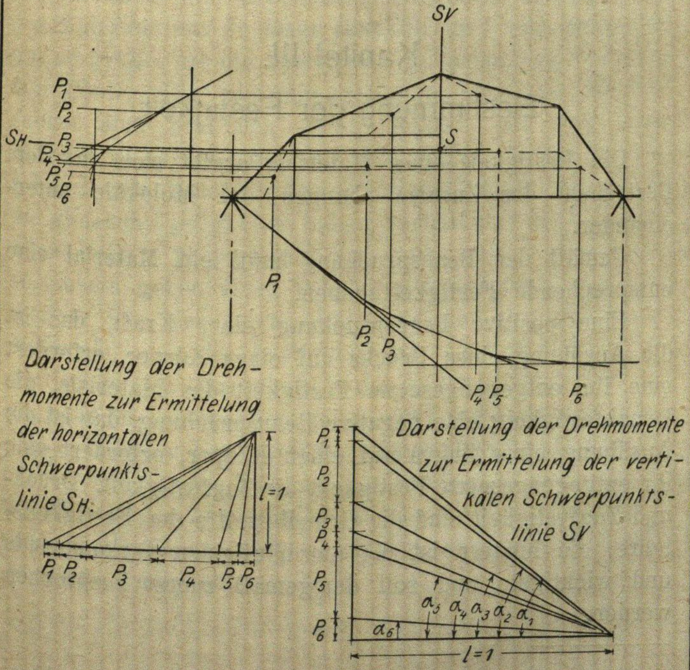
Um das Moment eines beliebigen Hebelarmes zu ermitteln, bedarf es aber nur der Verlängerung des Schenkels vom Winkel a und des Messens in der Senkrechten über dem Endpunkt des von 0 aus aufgetragenen Hebelarms.

Man trägt auf einer Horizontalen genau verhältnismäßig, also maßstäblich die einzelnen Hebelarme l_1, l_2, $l_3 \ldots . lx$ auf (Tafel II, Abb. 2). Vom Endpunkt eines jeden einzelnen Hebelarms zieht man eine Senkrechte nach unten, um darauf die Momente darzustellen.

Im 0-Punkt, also im Angriffspunkt der Momente, wird der Schenkel des Winkels a_1 angelegt. Im Schnittpunkt des Schenkels (a_1) mit der Vertikalen des Angriffspunkts der Kraft P_1 wird der Schenkel des Winkels a_2 angelegt, im Schnittpunkt dieses Schenkels und der Vertikalen der Kraft P_2 folgt der Schenkel des Winkels a_3 und so fort. Verlängert man den ersten und letzten Schenkel nach unten, so erhält man senkrecht über deren Schnittpunkt den Schwerpunkt des gesamten Querschnittes. Ist die Massenverteilung über und unter der Horizontalen des Hebelarms nicht symmetrisch, so muß eine gleiche Schwerpunktsermittelung in bezug auf die Vertikale ge-

Tafel III.

Graphische Schwerpunktsbestimmung unter Berücksichtigung der Schwerpunktslage in der Vertikalen



Darstellung der Drehmomente zur Ermittelung der horizontalen Schwerpunktslinie SH.

Darstellung der Drehmomente zur Ermittelung der vertikalen Schwerpunktslinie SV macht werden. Durch Tafel III wird ein solches Beispiel gegeben.

Die hier gegebenen Grundverfahren der grafischen Kräftebestimmung werden in der Praxis mit kleinen Abweichungen, die nur auf bequemerer Anwendung beruhen, angewandt, wie das im Teil II/1*) geschehen.

Kapitel III.

Bestimmung der Festigkeit.

Die Festigkeit eines Materials ergibt sich aus dem Bestreben des Zusammenhanges der Moleküle untereinander.

Gemäß der Beanspruchung muß ein Material eine entsprechende Festigkeit haben.

Eine positive Beanspruchung einer Kraft, das ist die Ausübung eines Drucks auf einen Körper, erfordert eine ihr entgegengesetzte Festigkeit des Materials, die Druckfestigkeit; eine negative Beanspruchung, das ist die Ausübung eines Zuges auf einen Körper, erfordert eine ihr entgegengesetzte Festigkeit, die Zugfestigkeit. Druck- und Zugfestigkeit sind die Grundbegriffe der Festigkeitslehre; die letztere ist die am häufigsten vorkommende und wichtigste und soll demgemäß zuerst besprochen werden.

---

*) Teil II erscheint als Volckmanns Bibliothek für Flugwesen Bd. VIII.